Una Propuesta de Uso de Tecnología en la Enseñanza del Tema: Interpolación por Splines

Blanca Evelia Flores Soto
bflores@gauss.mat.uson.mx
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Los Splines permiten representaciones matemáticas de superficies partiendo de información relativa a algunos de sus puntos. Su construcción consiste en obtener una función de interpolación que pase por esos puntos. Para poder hacer esto es necesario contar con algunas habilidades matemáticas, por ejemplo: derivación, buen manejo del álgebra y finalmente solución de sistemas de ecuaciones lineales grandes; que en ocasiones adolecen los estudiantes. Lo anterior presenta grandes contratiempos en donde el potencial que ofrece la calculadora Voyage 200 puede ser de gran utilidad, como se intentará mostrar en esta presentación. El uso de la calculadora Voyage 200 se plantea desde dos aspectos, uno demostrativo en el que el maestro lleve algunos desarrollos algebraicos realizados, y otro práctico en el que los alumnos utilicen directamente la calculadora.

INTRODUCCIÓN

Las transformaciones del adversario de Arnold Schwarzenegger en la película Terminator 2 es realmente un poco de **magia matemática**: Son **Splines o B-splines** que también son responsables de la transformación más importante que ha tenido el diseño geométrico desde la era de los modelos de arcilla. Los Splines son especialmente importantes en la aviación y en la industria del automóvil, donde la forma es muy importante.

En 1946, Schoenberg introdujo la interpolación fragmentaria utilizando polinomios, los B-Splines ("B" por la "base"). Pero ni su poder de cálculo ni su flexibilidad geométrica fue apreciada (o necesitada) en ese entonces.

Hoy en día, los Splines permiten representaciones matemáticas de las superficies que sería imposible realizar a mano. En Boeing, cálculos que implican 30 a 50.000 puntos de referencia son rutinarios. ¡Imagínese el medir, el trazar, y el suavizar 50.000 puntos a mano!

El término spline viene de “bosquejo”, los splines son tiras flexibles guiadas por puntos, usados para dibujar curvas.

Todo esto es muy interesante y más aún es el hecho de que muchas personas no lo saben.

Obtener o desarrollar Splines implica el conocer de varias áreas de las matemática. Por ejemplo, es necesario conocer definiciones básicas de Cálculo, Álgebra Elemental y Álgebra Lineal entre otras. Esta es la principal razón por la cual se puede aprovechar el potencial que ofrece la calculadora *Voyage 200*. Uno de los contratiempos que se presentan en el aula es el hecho de que es necesario conocer algunos conceptos básicos de varias materias, por ejemplo: derivación, buen manejo del álgebra y finalmente solución de sistemas de ecuaciones lineales grandes; que en ocasiones adolecen los estudiantes. En este sentido la calculadora *Voyage 200,* puede ser de gran utilidad como se intentará mostrar aquí.

Cuando se llega a lograr que los alumnos tengan una comprensión de las herramientas teóricas del tema se carece de, por lo menos en el aula, de una asimilación visual, ya que todo queda en

expresiones algebraicas de las funciones y sé esta imposibilitado para observarlas gráficamente y analizar su utilidad.
Aunado a esto se encuentra el tiempo que se invierte en el tema y que de hacerlo con la calculadora *Voyage 200,* este podría verse reducido o bien seguir utilizando el mismo número de horas pero con mucho mayor número de aplicaciones.
El uso de la calculadora *Voyage 200* se plantea desde dos aspectos, uno demostrativo en el que el maestro lleve algunos desarrollos algebraicos realizados, y otro práctico en el que los alumnos utilicen directamente la calculadora.

INTERPOLACIÓN

La interpolación consiste en obtener una función que corresponda a una serie de datos conocidos.
Una de las clases de funciones más útiles y mejor conocidas es la de los polinomios algebraicos, es decir el conjunto de funciones de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes reales.
Una de las razones importantes por la cual se debe considerar esta clase de polinomios en la interpolación de funciones, es que la derivada y la integral de un polinomio son fáciles de determinar y también son polinomios. Por esta y otras razones más, con frecuencia se usan los polinomios para aproximar a las funciones continuas.

TIPOS DE INTERPOLACIÓN

Existen varios polinomios de Interpolación, entre ellos los más comunes son:

1. Polinomio de Lagrange
2. Polinomio de Diferencias Divididas de Newton

Por ejemplo, si se tiene un conjunto de siete datos como los siguientes:

X	1	3	4	4.5	6	7	8.5
Y	1	2	5	6	5.5	4	5

Se pueden graficar de manera muy exacta con ayuda de la calculadora *Voyage 200* para que se pueda apreciar con claridad la forma en que están distribuidos los puntos:

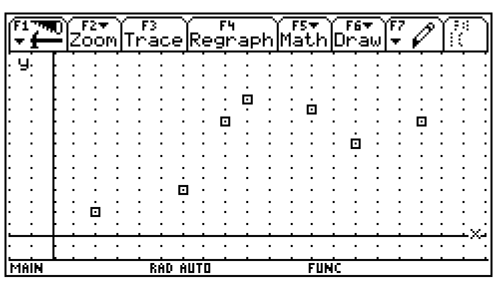

Figura 1

Construyendo y graficando cualquiera de las dos interpolaciones anteriores, ya que se trata del mismo polinomio y solo difieren por la forma de obtenerse, se puede apreciar:

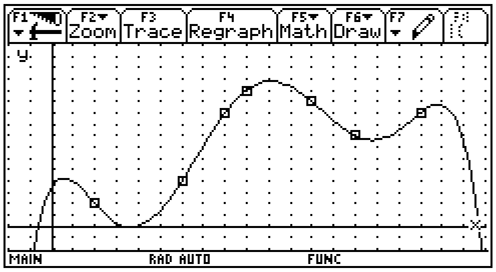

Figura 2

Este es un polinomio de Interpolación que consisten en un polinomio de grado *n-1* que pasa por los *n* puntos conocidos. Es decir, en este ejemplo se tienen siete puntos y el polinomio es de grado seis y pasa por los siete puntos. Esto significa que entre mayor sea el número de datos o puntos conocidos mayor será el grado del polinomio.
Con la ayuda de la gráfica se puede realizar junto con los alumnos un análisis conduciéndolos de tal manera que lleguen a observar algunos puntos importantes como por ejemplo: que si se tienen mayor número de puntos mayor serían las oscilaciones, lo que llevaría concluir que este tipo de polinomios no son muy eficaces para realizar aproximaciones.

INTERPOLACIÓN POLINÓMICA FRAGMENTARIA

Un procedimiento alterno consiste en dividir el intervalo en una serie de subintervalos y en cada uno construir un polinomio (generalmente) diferente. A esta forma se le conoce como **aproximación polinómica fragmentaria**.
La aproximación polinómica fragmentaria más simple es la interpolación lineal fragmentaria que consiste en unir la serie de puntos dados por medio de una poligonal. Esto es mediante una serie de segmentos de rectas lo que, aprovechando que la calculadora *Voyage 200* presenta la opción de graficación, para los datos antes usados sería:

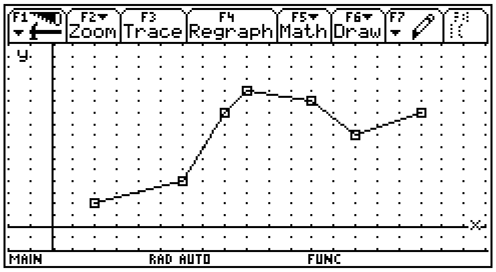

Figura 3

Así que con esta representación visual real y no imaginaria se puede orientar a los alumnos para que de nuevo analicen lo que se observa, de alguna manera ellos tienen que llegar a concluir que la interpolación con funciones lineales ofrece una desventaja: no se tiene la seguridad de que haya diferenciabilidad en los extremos de cada subintervalo, lo cual significa que la función interpolante no es "suave" en dichos puntos. Y en ocasiones, las consideraciones físicas de los problemas indican claramente que se requiere esa condición y que la función que se utilice para aproximar debe ser continuamente diferenciable. Por lo que debiera ser una condición que se debe satisfacer si se desea una “buena” función (primera derivada).
Por lo tanto, se necesita otro tipo de interpolación polinómica fragmentaria.

SPLINES CUBICOS

La aproximación polinómica fragmentaria más común utiliza polinomios de grado tres entre cada par de puntos consecutivos y recibe el nombre de **interpolación de trazadores cúbicos o Splines cúbicos**.

Definición: Dada una función f definida en $[a,b]$ y un conjunto de puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ un interpolante de trazador cúbico S para f es una función que cumple con las siguientes condiciones:

1. *S(x)* es un polinomio cúbico denotado por $S_j(x)$ en el intervalo $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ para cada *j= 0,1,2,..., n-1*;
2. $S(x_j) = f(x_j)$ para cada *j = 0, 1, 2,..., n*;
3. $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ para cada *j = 0, 1, 2,..., n-2*; (lo que asegura la continuidad)
4. $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ para cada *j = 0, 1, 2,..., n-2*; (lo que asegura diferenciabilidad en los puntos)
5. $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ para cada *j = 0, 1, 2,..., n-2*; (lo que asegura que no hay cambios de concavidad en los nodos o puntos)

Se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones a la frontera

- $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera libre o natural)
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera sujeta)

Cuando se presentan las condiciones de frontera libre, el trazador recibe el nombre de Trazador natural.
En términos generales, con las condiciones de frontera sujeta se logran aproximaciones más exactas, ya que abarca mayor información acerca de la función. Pero para que se cumpla este tipo de condición, se requiere tener los valores de la derivada en los extremos o bien una aproximación precisa de ellos. Si se desea construir el conjunto de polinomios de la interpolación de trazador cúbico de una determinada función *f*, se van aplicando cada una de las condiciones de la definición a un polinomio cúbico general.
Todo este manejo algebraico se puede realizar aprovechando las ventajas de la calculadora *Voyage 200*. Este desarrollo es minucioso, tanto en pizarrón como con la calculadora pero es un poco menor con calculadora.
Así que se mostrarán algunas pantallas (figuras 4 a 12) en las que se ve la manera de editar las instrucciones en la calculadora y poder llegar a la forma general de estos polinomios cúbicos, para el caso de la forma general de los trazadores naturales.

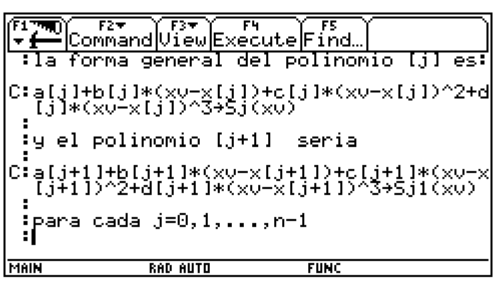

Figura 4

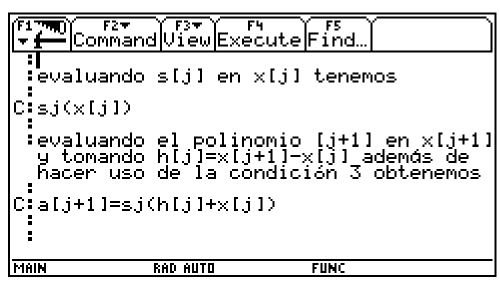

Figura 5

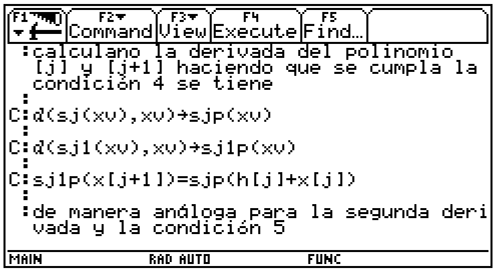

Figura 6

Figura 7

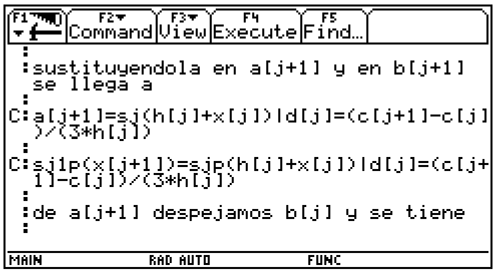

Figura 8

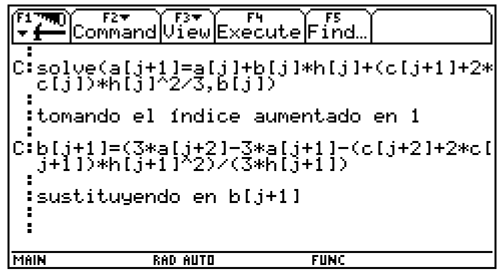

Figura 9

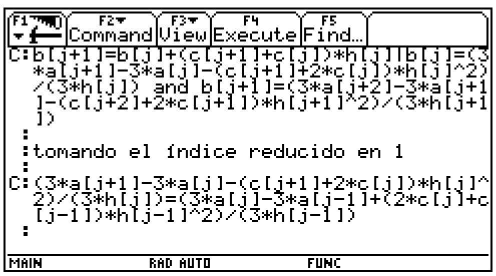

Figura 10

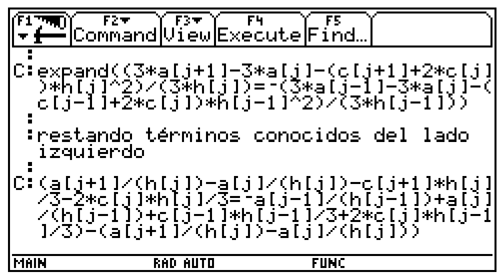

Figura 11

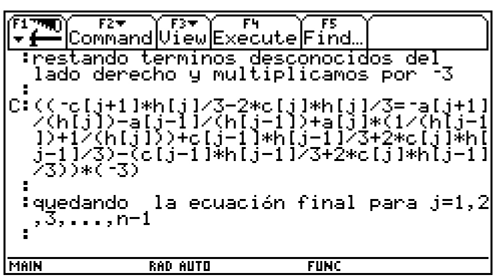

Figura 12

Con esto se obtiene la forma general de los *n-1* polinomios que forman la interpolación por Splines cúbicos.

Una vez que se tienen estas representaciones algebraicas, se procede a desarrollar para el ejemplo de los siete puntos que se presentaron con anterioridad. Se mostrará a grandes rasgos algo de lo que se hace para aplicar este procedimiento con la calculadora *Voyage 200*, que se sugiere que sea realizada por los mismos alumnos ya que cuentan con la expresión general.

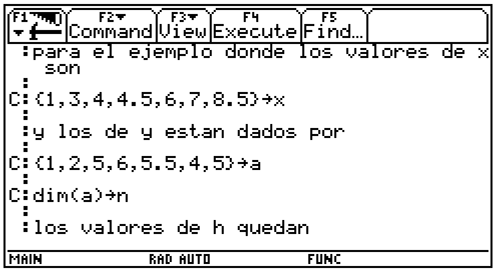

Figura 13

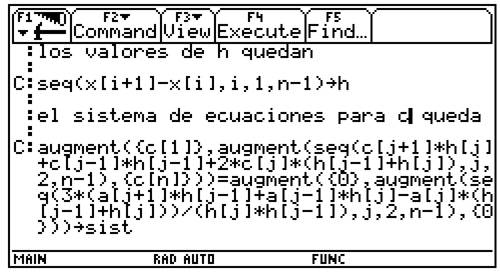

Figura 14

Cabe hacer la aclaración que este sistema de ecuaciones es tridiagonal y que es un tema que se puede tratar con mayor profundidad, en este caso no se pretende hacer ya que solo se intenta aprovechar la herramienta y además porque no es el tema central.

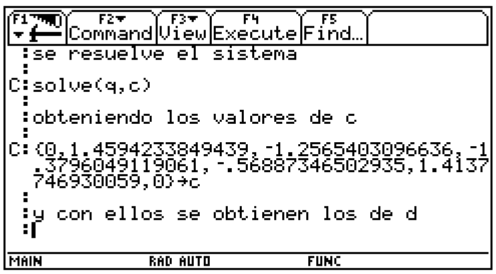

Figura 15

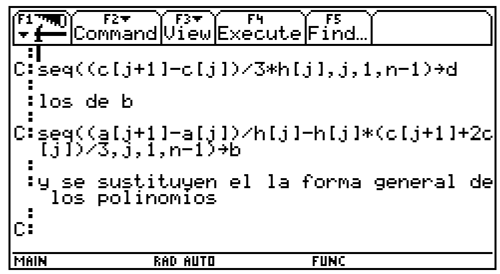

Figura 16

Se puede pedir a los alumnos que los grafiquen y hacer comparaciones con las anteriores interpolaciones y determinar ventajas y desventajas de este tipo de interpolación.
La gráfica de estos polinomios por pedazos queda:

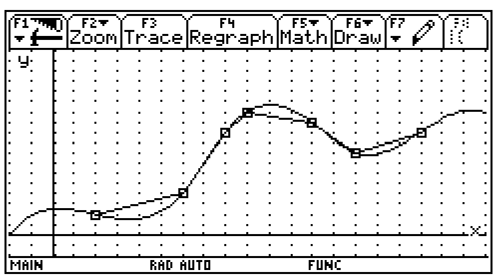

Figura 17

esta es la grafica del Spline cúbico, si se anexa el de Lagrange para comparar tenemos

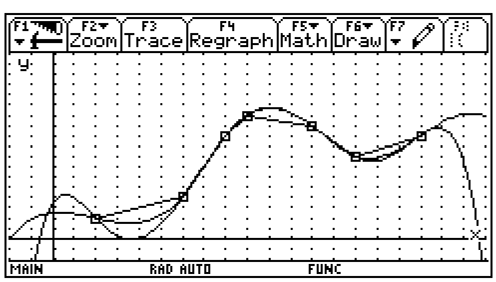

Figura 18

Se podría iniciar una discusión con los alumnos sobre lo que se ve en esta última gráfica. Se debe hacer notar que son unos puntos tomados muy al azar y que además son muy pocos puntos comparados con un problema real en que pueden llegar a tener 50000 puntos.
La ventaja de esta herramienta tecnológica sería que se pueden modificar los datos fácilmente y ver que sucede para un mayor número de valores o bien para un problema real.

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones a las que se puede llegar, pensando que los alumnos tienen un conocimiento sobre el uso y manejo de la calculadora *Voyage 200*, podría decirse que

- Una de las grandes ventajas es el poder tener acceso inmediatamente a una visualización gráfica muy exacta del problema, lo cual no se tendría en pizarrón.
- Aunado también una visualización gráfica de la solución del problema. Y esta si es prácticamente imposible de realizar sin el uso de tecnología.
- La posibilidad de resolver problemas que involucren grandes cantidades de datos, por lo menos más de lo que se podría hacer manualmente
- Y por añadidura los recursos algebraicos nos permiten obtener la forma general de los polinomios sin que los alumnos puedan considerar tediosos ese proceso.

EXPECTATIVAS

Como se pudo ver este es un tema de Métodos Numérico y como tal puede realizarse algún programa que nos ahorre muchos de los cálculos. Aunque fue bastante fructífero el resultado sin haber utilizado la programación, se espera poder realizarlo con Programación utilizando la misma calculadora *Voyage 200* y así poder comparar ambas formas de abordarlo.