

Obtención automática de las ecuaciones de la robótica. Aplicación a diversos robots industriales. Simulación.

M. Concepción Bermúdez Edo
Miguel A. Fernández Cuenca

Abstract

Basándonos en la representación de Denavit-Hartenberg y en el algoritmo de C.S.G. Lee (1.983), se utiliza Matemática para realizar programas propios que permiten la obtención automática de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas de un manipulador robótico; asimismo, se obtiene el jacobiano del manipulador. Finalmente, se hacen varias aplicaciones a sendos robots industriales (ROBUR, MANDOS, PUMA560, STANFORD) y sobre diversas plataformas, así como la simulación del movimiento en distintas situaciones.

1 Introducción.

La necesidad cada vez más imperiosa de aumentar la productividad y conseguir productos acabados de una calidad uniforme, está haciendo que la industria gire cada vez más hacia una automatización basada en computador.

Una definición utilizada por el "Robot Institute of America" da una descripción precisa de los robots industriales: "un robot es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas o dispositivos especializados, a través de movimientos programados variables para la realización de una diversidad de tareas". En definitiva, un robot industrial es un manipulador de uso general controlado por computador que consiste en algunos elementos rígidos conectados en serie mediante articulaciones prismáticas o de revolución.

En este contexto, el problema fundamental trata del cálculo de las fuerzas y momentos de control que son requeridos para producir el movimiento deseado del efector final.

Por ello es aconsejable disponer de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento del robot. Las ecuaciones dinámicas de un manipulador robótico realizan tal objetivo. Tales ecuaciones de movimiento serán útiles para:

- i) Simulación por computador del movimiento del brazo robot.
- ii) Diseño de los algoritmos de control.
- iii) Evaluar la estructura cinemática del brazo.

En el presente trabajo realizamos el estudio de la cinemática y dinámica de robots utilizando coordenadas homogéneas. El estudio cinemático se realiza mediante la asignación de sistemas de coordenadas según el criterio de Denavit-Hartenberg. Con este criterio la asignación de matrices de cambio de un sistema de coordenadas al anterior (A_{i-1}^i) se puede hacer de forma sistemática. Para el estudio dinámico se sigue el algoritmo propuesto por C.S.G. Lee (1983), así, utilizamos las ecuaciones de Lagrange-Euler de movimiento para sistemas no conservativos y la representación matricial de Denavit-Hartenberg para cadenas cinemáticas con lo que obtenemos las ecuaciones

dinámicas del brazo en forma compacta, lo que facilita el análisis y simulación por computador.

2 Obtención automática de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas, y del Jacobiano de un manipulador robótico.

El problema cinemático de un manipulador robótico consiste en obtener la relación entre la posición y orientación del efector final, en un instante dado, y las variables de las articulaciones (ángulos y/o traslaciones).

Denavit y Hartenberg (D-H), propusieron un método sistemático y generalizado para describir y representar la geometría espacial de los elementos del brazo de un robot, con respecto a un sistema de referencia inercial, fijo en la base del robot.

Este método consiste en establecer un sistema de coordenadas, ligado al cuerpo, para cada elemento de una cadena articulada; y utiliza una matriz de transformación homogénea (4x4) A_{i-1}^i para describir la relación entre los sistemas de coordenadas de dos elementos rígidos adyacentes. Reduciendo el problema cinemático a encontrar una matriz de transformación homogénea equivalente A_0^n que relaciona el desplazamiento espacial del "sistema de coordenadas de la mano" al sistema de referencia inercial.

Con el criterio de D-H la matriz de transformación que relaciona el sistema de coordenadas i -ésimo con el $(i-1)$ -ésimo es:

$$A_{i-1}^i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen} \theta_i \cos \alpha_i & \text{sen} \theta_i \text{sen} \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \text{sen} \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \text{sen} \alpha_i & a_i \text{sen} \theta_i \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde: a_i es la distancia entre los ejes Z_{i-1} y Z_i ,

α_i es el ángulo de rotación desde el eje Z_{i-1} hasta el Z_i , respecto del eje X_i ,

θ_i es el ángulo de la articulación del eje X_{i-1} al eje X_i respecto del eje Z_{i-1}

d_i es la distancia desde el origen de coordenadas $(i-1)$ hasta la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i a lo largo del eje Z_{i-1}

Si la articulación es de revolución, α_i , a_i y d_i son constantes mientras que $\theta_i(t)$ es la variable de la articulación. En el caso de una articulación prismática, la variable es $d_i(t)$, siendo α_i , a_i y θ_i constantes.

La relación entre las coordenadas homogéneas P_i , de un punto del elemento i , con respecto al sistema de coordenadas i , y las coordenadas de dicho punto en el sistema de coordenadas $i-1$ es:

$$P_{i-1} = A_{i-1}^i P_i$$

Así, para un manipulador con n articulaciones, la matriz:

$$A_0^n = A_0^1 A_1^2 \dots A_{n-1}^n$$

nos da la posición y orientación de la mano del manipulador respecto del sistema de referencia de la base.

Para la obtención del modelo dinámico del brazo robot, se ha utilizado el algoritmo propuesto por C.S.G. Lee, que esta basado en la formulación de Lagrange-Euler junto con la representación matricial de D-H. Las ecuaciones de Lagrange, de un manipulador con n articulaciones, son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \partial L \partial q_i = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde: L es la función Lagrangiana $L = K - V$ (KyV energías cinética y potencial)
 q_i son las coordenadas generalizadas (θ_i ó d_i), $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, y τ_i es la fuerza o momento generalizado aplicado al sistema en la articulación i.

Calculando la energía cinética K y la energía potencial V, y sustituyendo la función Lagrangiana L en las ecuaciones de Lagrange se obtienen las ecuaciones del movimiento, que se expresan en forma matricial como:

$$\tau(t) = D(q(t)) \ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + c(q(t))$$

Donde: $\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t))^T$ es el vector de fuerzas generalizadas aplicadas por los actuadores en las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$.

$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T$ es el vector de las variables de articulación del manipulador.

$\dot{q}(t)$ es el vector columna de la velocidad de las variables de articulación .

$\ddot{q}(t)$ es el vector columna de la aceleración de las variables de articulación .

$D(q)$ es una matriz $n \times n$ simétrica inercial de elementos:

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n Tr(U_{ij} J_j U_{ji}^T) \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

siendo $U_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_j}$ (para $j \leq i$, para $j > i$ $U_{ij} = 0$), $U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k}$
y J_j el tensor de inercia correspondiente al j-ésimo eslabón.

$h(q, \dot{q})$ es un vector columna de fuerzas de Coriolis y centrífugas no lineal cuyos elementos son:

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad i = 1, 2, \dots, n$$

con $h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n Tr(U_{jkm} J_j U_{ji}^T)$ para $i, k, m = 1, 2, \dots, n$

$c(q)$ es un vector columna de fuerza de la carga gravitatoria, cuyos elementos son:

$$c_i = \sum_{j=i}^n (-m_j g U_{ji} \vec{r}_j)$$

A causa de su estructura matricial, las ecuaciones de L-E son interesantes desde el punto de vista de control ya que dan un conjunto de ecuaciones de estado que permiten el diseño de una ley de control que compensa fácilmente todos los efectos no lineales.

Otro problema adicional es que, en general, el movimiento deseado de un manipulador se especifica en términos de una trayectoria temporal de la mano en coordenadas cartesianas, mientras que el sistema de control de los servos requiere que las entradas de referencia se especifiquen en coordenadas de articulación. Así mismo, los movimientos de los diferentes motores de las articulaciones se combinan y funcionan simultáneamente con velocidades diferentes con el fin de lograr un movimiento uniforme de la mano. Siendo necesaria la relación entre las velocidades lineal $v(t)$ y angular $\Omega(t)$ de la mano y las velocidades de las articulaciones $\dot{q}(t)$, que está dada por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ \Omega(t) \end{pmatrix} = J(q) \dot{q}(t)$$

donde $J(q)$ es una matriz $6 \times n$, denominada el jacobiano del manipulador, cuyo i -ésimo vector columna viene dado por (Whitney[1972]):

$$J_i(q) = \begin{cases} \begin{pmatrix} z_{i-1} \times p_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} & \text{si la articulación } i \text{ es rotacional} \\ \begin{pmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si la articulación es prismática} \end{cases}$$

Siendo p_{i-1} la posición del origen del sistema de coordenadas de la mano desde el $(i-1)$ -ésimo sistema de coordenadas expresado en el sistema de coordenadas de la base y z_{i-1} es el vector unidad a lo largo del eje de movimiento de la articulación i expresado también en el sistema de coordenadas de la base; mientras que \times indica el producto vectorial.

Utilizando el manipulador algebraico de carácter general, *Mathematica*, se han realizado los programas correspondientes, que proporcionan las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del robot con tan sólo la introducción de los parámetros de Denavit-Hartenberg, así como el jacobiano del manipulador. Dichos programas no los incluimos por causa de la limitación de espacio, aunque se pueden facilitar a quien lo desee pidiéndolos a los autores.

3 Aplicaciones a diversos robots industriales.

En el presente trabajo, motivados por la necesaria concisión, aplicamos la formulación desarrollada solamente a los robots ROBUR y MANDOS obteniendo sus ecuaciones cinemáticas y dinámicas y su jacobiano.

3.1 Aplicación al robot ROBUR.

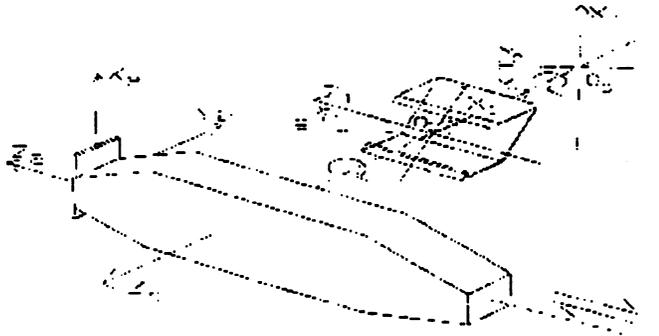


Figura 24: Robot Robur

Ecuaciones cinemáticas

$$\{x[0], y[0], z[0], 1\} = \{\{\text{Cos}[\text{TETA}[1.], 0, -\text{Sin}[\text{TETA}[1.]], -\text{De}[2.] \text{Sin}[\text{TETA}[1.]]\},$$

$$\{\text{Sin}[\text{TETA}[1.]], 0, \text{Cos}[\text{TETA}[1.]], \text{Cos}[\text{TETA}[1.]]\text{De}[2.]\}, \{0, -1., 0, 1.055\}, \{0, 0, 0, 1\} * \{x[2], y[2], z[2], 1\}$$

Espacio de trabajo

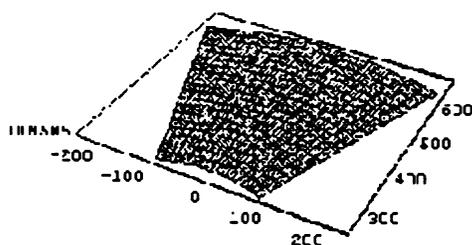


Figura 25: Espacio trabajo Robot Robur

Ecuaciones dinámicas

$$\{\{0\}, \{\text{Tf}[1]\}, \{\text{Tf}[2]\}\} = \{0, 0, 0\}, \{0, 1.272 - 2.1514\text{De}[2.] + 3.47\text{De}[2.]^2, 0\}, \{0, 0, 3.47\} * \{\{0\}, \{\text{TETA}''[1.]\}, \{\text{De}''[2.]\}\} + \{\{0\}, \{2.(-1.0757 + 3.47\text{De}[2.])\text{De}'[2.]\text{TETA}'[1.]\}, \{(1.0757 - 3.47\text{De}[2.])\text{TETA}'[1.]^2\} + \{\{0\}, \{-3.47(-3.0411\text{Cos}[\text{TETA}[1.] + 9.81\text{Cos}[\text{TETA}[1.]\text{De}[2.] - 0], \{-3.47(9.81\text{Sin}[\text{TETA}[1.]])\}\}$$

Jacobiano del Robot

$$\{\{0\}, \{Vx[2.]\}, \{Vy[2.]\}, \{Vz[2.]\}, \{Wx[2.]\}, \{Wy[2.]\}, \{Wz[2.]\}\} = \{\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\}, \{\{0\}, \{-\text{Cos}[\text{TETA}[1.]]\text{De}[2.]\}, \{-\text{De}[2.]\text{Sin}[\text{TETA}[1.]]\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{-\text{Sin}[\text{TETA}[1.]]\}, \{\text{Cos}[\text{TETA}[1.]]\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\} * \{\{0\}, \{\text{TETA}'[1.]\}, \{\text{De}'[2.]\}\}$$

3.2 Aplicación al robot MANDOS.

Ecuaciones cinemáticas

$$\{x[0], y[0], z[0], 1\} = \{\{\text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]], -\text{Sin}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]], 0, 1 * \text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]]\}, \{\text{Sin}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]], \text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]], 0, 2 * \text{Cos}[\text{TETA}[2.]/2] \text{Sin}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]/2]\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1\} * \{x[2], y[2], z[2], 1\}$$

Espacio de Trabajo

Ecuaciones dinámicas

$$\{\{0\}, \{\text{Tf}[1]\}, \{\text{Tf}[2]\}\} = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 0.33333 * l^2 * m1 + 1.33333 * l^2 * m2 + l^2 * m2 * \text{Cos}[\text{TETA}[2.]], 0.33333 * l^2 * m2 + 0.5 * l^2 * m2 * \text{Cos}[\text{TETA}[2.]]\}, \{0, 0.33333 * l^2 * m2 + 0.5 * l^2 * m2 * \text{Cos}[\text{TETA}[2.]], 0.33333 * l^2 * m2\} * \{\{0\}, \{\text{TETA}''[1.]\}, \{\text{TETA}''[2.]\}\} + \{\{0\}, \{-l^2 * m2 * \text{Sin}[\text{TETA}[2.]] \text{TETA}'[1.] \text{TETA}'[2.] - 0.5 * l^2 * m2 * \text{Sin}[\text{TETA}[2.]] \text{TETA}'[2.]^2\}, \{0.5 * l^2 * m2 * \text{Sin}[\text{TETA}[2.]] \text{TETA}'[1.]^2\}$$

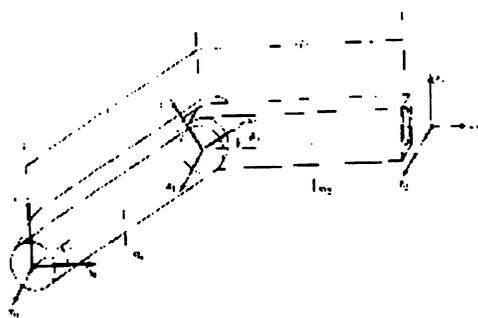


Figura 26: Robot Mandos

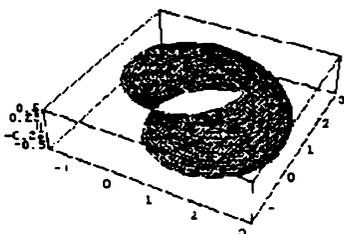


Figura 27: Espacio trabajo Robot Mandos

$$+ \{ \{0\}, \{-m1*(-4.905*1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.]]) - m2*(-9.81*1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.]]) - 4.905*1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]]\}, \{-m2*(-4.905*1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]])\} \}$$

Jacobiano del Robot

$$\{ \{0\}, \{Vx[2.]\}, \{Vy[2.]\}, \{Vz[2.]\}, \{Wx[2.]\}, \{Wy[2.]\}, \{Wz[2.]\} \} = \{ \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\} \}, \{ \{0\}, \{-1*\text{Sin}[\text{TETA}[1.]] - 1*\text{Sin}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]]\}, \{1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.]] + 1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]]\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{1\} \}, \{ \{0\}, \{-1*\text{Sin}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]]\}, \{1*\text{Cos}[\text{TETA}[1.] + \text{TETA}[2.]]\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{1\} \} \} * \{ \{0\}, \{\text{TETA}'[1.]\}, \{\text{TETA}'[2.]\} \}$$

También hemos aplicado esta formulación a los robots de seis articulaciones PUMA 560 y STANFORD, para lo que hemos tenido que utilizar *Mathematica 2.2.* en una estación de trabajo, no consignando sus expresiones a causa de su extensión.

4 Simulaciones diversas

Los procesos de simulación son de gran importancia en el desarrollo de los sistemas. Estos nos permiten estudiar el grado de aceptación de ciertos sistemas sin necesidad de implementarlos físicamente. Así, una vez que se han obtenido las ecuaciones dinámicas de los robots, procedemos a la integración numérica de dichas ecuaciones diferenciales de segundo orden y acopladas, mediante la utilización de *Mathematica*,



Figura 28: Robot Puma560

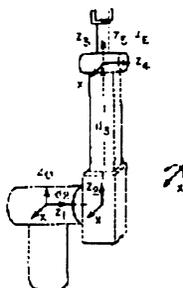


Figura 29: Robot Stanford

realizando diversas simulaciones del movimiento de cada robot en función de sus condiciones iniciales. Nos vamos a restringir a simular, tan sólo, la dinámica de ROBUR y MANDOS sin el efecto de los actuadores en dos situaciones concretas.

4.1 Simulación de las ecuaciones dinámicas del robot ROBUR

Condiciones iniciales.

$$\text{TETA}[1.] (t=0) = 20$$

$$\text{De}[2.] (t=0) = 0.12$$

$$\text{TETA}'[1.] (t=0) = 0$$

$$\text{De}'[2.] (t=0) = 0$$

Con las condiciones iniciales impuestas, el centro de gravedad está situado a la derecha del eje de giro del cuerpo 1. Como se aprecia en las gráficas, por efecto de la gravedad el brazo gira en sentido negativo en principio a la vez que el cuerpo 2 se desplaza en sentido positivo. Las fuerzas de Coriolis que se oponen al giro del cuerpo 1 en sentido negativo toman un papel significativo en esta situación.

4.2 Simulación de las ecuaciones dinámicas del robot MANDOS

Condiciones iniciales.

$$\text{TETA}[1.] (t=0) = 0$$

$$\text{TETA}[2.] (t=0) = 0$$

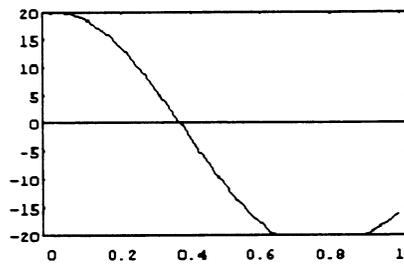


Figura 30: TETA[1.] = f(t)

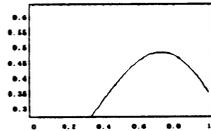


Figura 31: De[2.] = f(t)

$$\begin{aligned} \text{TETA}'[1.] (t=0) &= 0 \\ \text{TETA}'[2.] (t=0) &= 0 \end{aligned}$$

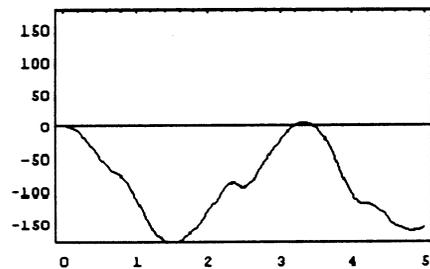


Figura 32: TETA[1.] = f(t)

En esta situación inicial, se produce un desequilibrio que hace que TETA1[t] disminuya hasta -180° , produciéndose un movimiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio (-90°). A su vez, esto influye en el movimiento de la segunda articulación, produciéndose un movimiento oscilatorio alrededor de su posición de equilibrio (0°). Debido a que TETA1'[t] \neq TETA2'[t] inicialmente TETA2[t] tiende a aumentar.

En un futuro próximo, esperamos extender lo anterior considerando los efectos de los actuadores en las simulaciones a realizar así como obteniendo los programas que nos proporcionen las ecuaciones anteriores cuando el manipulador va adosado a un

satélite artificial.

Bibliografía

- [1] Abell M.L., Braselton J.P.:1993, "Differential equations with *Mathematica*".Ed. AP Profesional.
- [2] Angulo J.M. y Avilés R.:1989, "Curso de Robótica". Ed.Paraninfo.
- [3] Arnold V.L. : " *Mathematical* Methods of Clasical Mechanics". Ed.Springer Verlag.
- [4] Blachman N.:1992, " *Mathematica*, un enfoque práctico". Ed.Ariel Informática.
- [5] Castillo E.,Iglesias A.,Gutiérrez J.M., Álvarez A.,Cobo A.:1993 " *Mathematica*". Ed Paraninfo.
- [6] Fu K.S.,Gonzalez R.C. y Lee C.S.G.:1988 "Robótica: Control, detección, visión e inteligencia" Ed. Mc Graw-Hill.
- [7] Goldstein H.: 1972, "Mecánica clásica". Ed.Aguilar
- [8] Lee C.S.G.:1983,"Robor Arm Dynamics".EM0207-1/83/000/0093\$01.0 IEEE.
- [9] Paul R.P.:1981,"Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control". Ed.MIT.
- [10] Wolfram S.:1991," *Mathematica*, a System for Doing Mathematics by Computer". Ed. Addison-Wesley

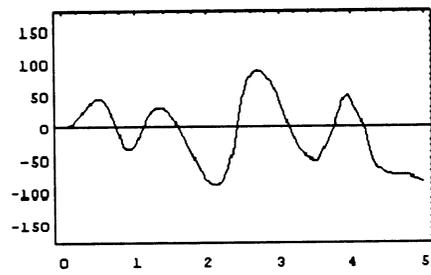


Figura 33: $\text{TETA}[2.] = f(t)$